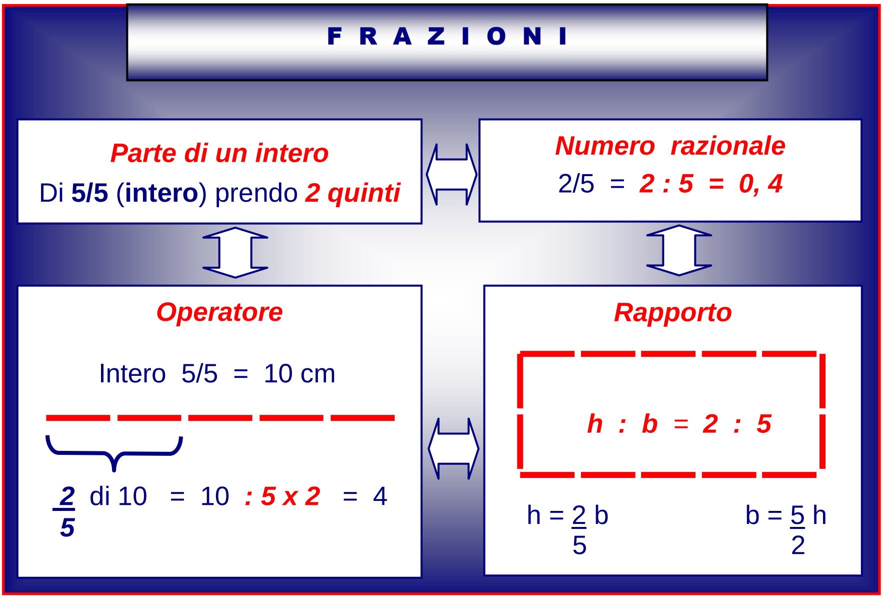
CAPIRE LE FRAZIONI

di Ennio Monachesi

SITO www.monachesi.it



Il **concetto** di frazione, come evidenziato nello schema logico, si articola in **4 aspetti** diversi, ma strettamente **interconnessi.**

1 -La frazione come **<u>parte di un intero</u>** è costituita da una o più **unità frazionarie uguali** in cui si suddivide l'intero stesso.
Ad es. dell'intero suddiviso in **5 quinti** uguali si prendono **2 quinti**.
Il denominatore è espresso con la parola "**quinti**" per evidenziare il suo diverso **significato** rispetto al **numeratore** che invece serve a **quantificare** le unità frazionarie considerate.

2 - Dividendo il numeratore fratto il denominatore (diverso da zero) di una frazione, si ottiene come quoziente un **numero razionale**, che è il rapporto tra numeratore e denominatore, e si può scrivere sia come frazione sia come numero decimale, o anche intero se la frazione è apparente. Ad es. **2/5 = 2 diviso 5 = 0,4**. Infatti **2** equivale a **20 decimi**, e 20 decimi **diviso 4** fanno **4 decimi**. Oppure 6/2 = 15/5 = 3.

3 -La frazione è **un operatore**, che consente di calcolare il valore della frazione di una grandezza, **dividendo** il valore di tale grandezza diviso il **denominatore** e moltiplicando il **risultato per il numeratore,** nei problemi **diretti**; o viceversa, di calcolare il valore di una grandezza conoscendo il valore di una sua frazione, **dividendo** il valore di tale frazione diviso il **numeratore** e moltiplicando il risultato **per** il **denominatore,** nei problemi **inversi**. Ritengo tuttavia che, in base al diverso **significato** dei due termini della frazione, si possa ragionare anche con una logica di **proporzionalità diretta** tra **i soli numeratori** e i valori delle rispettive frazioni con lo stesso denominatore. *(Vedi FRAZIONE COME OPERATORE)*

4 -La frazione può anche indicare **un rapporto**. Ad es. l'**altezza** di un rettangolo sta alla sua **base** come **2 sta a 5.** Cioè **h : b = 2 : 5.** Da cui **h = 2/5 b,** e cioè **l'altezza è 2 quinti** della **base.**
Ma quest'ultima formulazione si basa sui **2 precedenti concetti** di frazione. Infatti, se l'**altezza è 2 quinti** della **base,** questa, cioè la **base,** è intesa come **l'intero 5/5,** e l'**altezza** come una sua parte, cioè i suoi **2/5**. E' il primo concetto di frazione come parte di un intero.
Inoltre **2/5** è anche **l'operatore** che, conoscendo l'intero, cioè la base, mi permette di calcolarne la frazione **2/5**, cioè l'altezza, con la **formula** già vista *"base **diviso denominatore** 5 **per numeratore** 2."*
Se inverto il rapporto, ottengo **b = 5/2 h**, e cioè che la **base è 5/2** (frazione) dell'**altezza 2/2** (intero), calcolando la base con la stessa formula *"altezza **diviso denominatore** 2 **per numeratore** 5."*
Ma su tale formula, come già detto, vedi il prossimo paragrafo FRAZIONE COME OPERATORE.

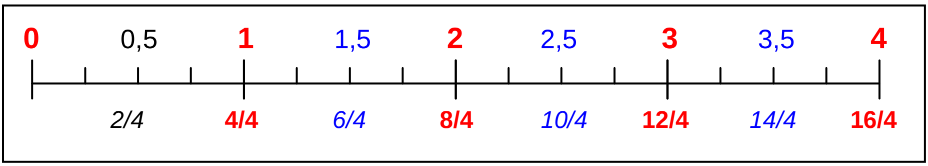
La linfa della comprensione alimenta il pensiero.

Quanto detto evidenzia sia la **diversità** dei 4 aspetti del concetto di frazione, sia la loro **stretta interconnessione**. Tali concetti si traducono in scritture simboliche, formule e algoritmi di calcolo, che si possono capire tanto meglio quanto più si sono capiti **i concetti e i significati**, senza i quali i simboli sono privi di significato e le formule e gli algoritmi sono appresi come automatismi ciechi. Quando ciò avviene si **atrofizza** la matematica, privandola della **linfa vitale** della **comprensione** dei concetti, che riempie di significato le scritture simboliche e fonda gli **algoritmi** "**sintattici**" di calcolo e **il ragionamento "strategico"** nella soluzione dei problemi, in modo anche originale.
Ma il rigore degli algoritmi porta a prescindere dal significato, che invece è fondamentale per poter capire e ragionare. **René Thom**, medaglia Field '58, (il "*nobel*" della matematica) osserva: *"Si accede al rigore assoluto solo eliminando il significato. Ma se si deve scegliere tra **rigore e significato**, scelgo quest'ultimo senza esitare" (G. Ottaviani, "La teoria degli insiemi…", su internet).*
Nel libro di ***Keith Devlin***, *"L'istinto matematico"*, si costata come i **venditori** di noci di cocco e gli **acquirenti** del supermercato se la cavano benissimo con la "***matematica di strada***", "naturale" e piena di significato, con calcoli e problemi pratici e significativi, mentre falliscono con la "*matematica scolastica*", perché astratta.. **Devlin** osserva: *"Il problema che molte persone hanno con la **matematica scolastica** è che non sono mai arrivate a comprenderne il significato: rimane per sempre un **gioco astratto di simboli formali."***
E allora bisogna cercare di "***gettare un ponte***", come dice **Hans Freudenthal**, tra la "**matematica naturale" intuitiva**, e quella "**scolastica", formale**, con una **didattica laboratoriale** e un approccio "***sostanziale-significativo***", per capire meglio anche quello "***formale.***" *(Pellerey, "Progetto RICME", I).* Tale criterio è tanto più importante quanto più i simboli matematici sono **astratti**, come quelli delle **frazioni,** in cui ovviamente aumenta il **rischio** di **formalismo** astratto e mnemonico.

F R A Z I O N I

PROPRIE ***minori** di **1 intero***	**APPARENTI** **1** o **più interi**	**IMPROPRIE** apparenti + *proprie* ***maggiori** di **1 o più interi***
1 quarto		
2 quarti		
3 quarti		
	4 quarti = 1 intero	
		5 quarti = 4/4 + *1/4*
		6 quarti = 4/4 + *2/4*
		7 quarti = 4/4 + *3/4*
	8 quarti = 2 interi	
		9/4 = 4/4 + 4/4 + *1/4*
		10/4 = 4/4 + 4/4 + *2/4*
		11/4 = 4/4 + 4/4 + *3/4*
	12 quarti = 3 interi	
		13/4 = 3 interi + *1/4*
		14/4 = 3 interi + *2/4*
		15/4 = 3 interi + *3/4*
	16 quarti = 4 interi	
	continua all'infinito	*continua all'infinito*

Si può riempire qualche altra tabella con la stessa struttura, ma con serie di **frazioni diverse**: ad es. 1/5 , 2/5, 3/5 ecc.; 1/8, 2/8, 3/8, ecc., per una piena comprensione delle 3 classi di frazioni, che sono anche efficacemente rappresentabili sulla **retta dei numeri.**



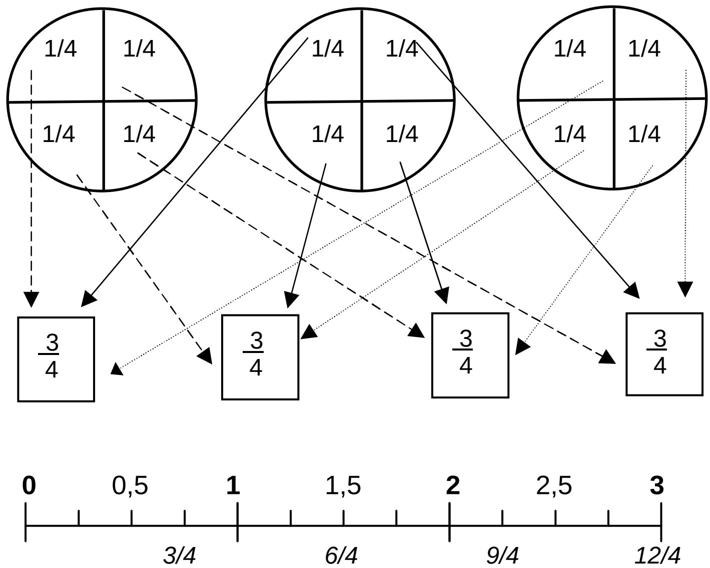
FRAZIONE COME *NUMERO RAZIONALE*

Voglio *dividere 3 euri tra 4 bambini.*

3 euri sono 12 quarti, che divisi in 4 parti uguali fanno **3 quarti.**

3 euri sono 300/100, che, divisi in 4 parti uguali fanno 75/100,

e cioè 0 euri, 7 decimi e 5 centesimi = **0,75**



3 : 4 *= 12 quarti : 4 = 3 quarti*

3 : 4 *= 300 centesimi : 4 = 75/100 = 0,75* **3/4 = 0,75**

Se devo dividere **3 diviso 4**, cioè un numero intero diviso un altro numero intero più grande, il risultato è un *numero razionale* (dal latino ratio, rapporto). Esso infatti esprime il **rapporto tra il numeratore e il denominatore** di una frazione, e può avere una parte decimale. **Ogni frazione è un numero razionale** e si può esprimere come numero decimale, o intero se la frazione è apparente, ad es. 4/2 = 6/3 = 8/4 = 40/20 = 2, dividendo il numeratore diviso (fratto) il denominatore (diverso da 0).

1/5 = 1 diviso, fratto 5
1 euro : 5 = 100/100 : 5 = 20/100 = 2/10 = 0,2

2/5 = 2 diviso, fratto 5
2 euri : 5 = 200/100 : 5 = 40/100 = 4/10 = 0,4

3/5 = 3 diviso, fratto 5
3 euri : 5 = 300/100 : 5 = 60/100 = 6/10 = 0,6

4/5 = 4 diviso, fratto 5
4 euri : 5 = 400/100 : 5 = 80/100 = 8/10 = 0,8

5/5 = 5 diviso, fratto 5
5 euri : 5 = 500/100 : 5 = 100/100 = 10/10 = 1

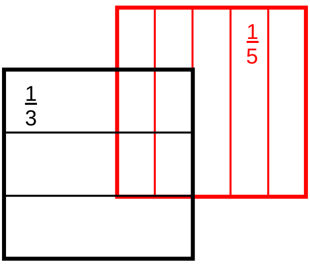
Molte trasformazioni si possono visualizzare anche con i set delle frazioni, soprattutto con il set lucido, per i centesimi, e con il metro.

*Le **matrici** da stampare su **lucidi trasparenti** e ritagliare, e **l'animazione al computer**, anche del SET LINEARE, si trovano nel sito* ***www.monachesi.it***

Il *"set lucido delle frazioni"* si compone di **quadrati lucidi trasparenti** uguali, frazionati o in un solo senso o in entrambi i sensi, dai 2/2 fino ai 100/100, con linee di **colore diverso** per i denominatori **primi** di ***2/2*** *(azzurro),* ***3/3*** *(nero),* ***5/5*** *(rosso),* ***7/7*** *(violetto),* e rispettivi **multipli.** Nelle figure-frazioni con denominatore **multiplo** di quelli primi suddetti, prevale, per l'intero perimetro, il colore del denominatore primo più grande: il *violetto di 7* prevale sul *rosso di 5* che prevale sul *nero di 3* che prevale sull' *azzurro di 2.*

Prodotto di frazioni

Il prodotto di frazioni si può visualizzare sovrapponendo 2 quadrati del set raffiguranti le 2 frazioni da moltiplicare, frazionati, uno in senso verticale e l'altro in senso orizzontale. Esempio:



2/3 x (di) 2/5 = 4/15
2/5 x (di) 2/3 = 4/15

Se sovrappongo **3/3** su **5/5** visualizzo

3/3 x 5/5 = 15/15

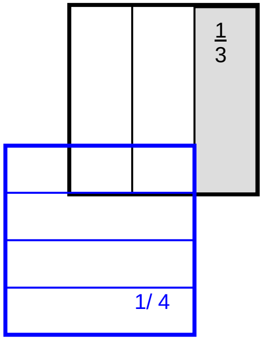
Problema *(Prova nazionale INVALSI 2008 per l'esame di terza media)*

Un padre e i suoi 4 figli si dividono la cifra vinta al lotto in questo modo: al padre spetta 1/3 dell'intera somma, e il rimanente viene diviso in parti uguali tra i figli. Quale parte della somma spetta a ciascuno dei figli?

Soluzione

L'intera somma è 3 terzi. Se il padre ne prende **1 terzo** ai 4 figli ne restano **2 terzi**.

$$1 - 1/3 = 3/3 - 1/3 = 2/3$$

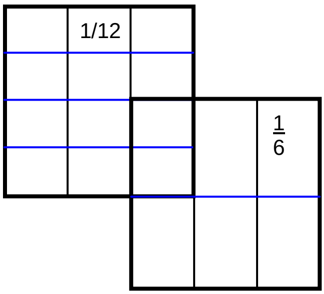


$$\boxed{\frac{2}{3} : 4 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{12}}$$

***1 quarto* di 2 terzi** *= 2 dodicesimi*

2 dodicesimi = 1 sesto

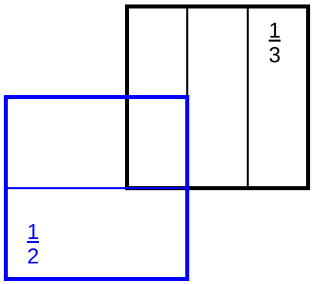
$$\boxed{\frac{2}{12} = \frac{1}{6}}$$



Poiché i figli sono 4, per trovare la parte che spetta a ciascuno di essi, si divide la parte rimasta, cioè **2 terzi**, in **4 parti** uguali, trovando **1 quarto di 2 terzi** che è uguale a **2 dodicesimi**, cioè **1 sesto.**

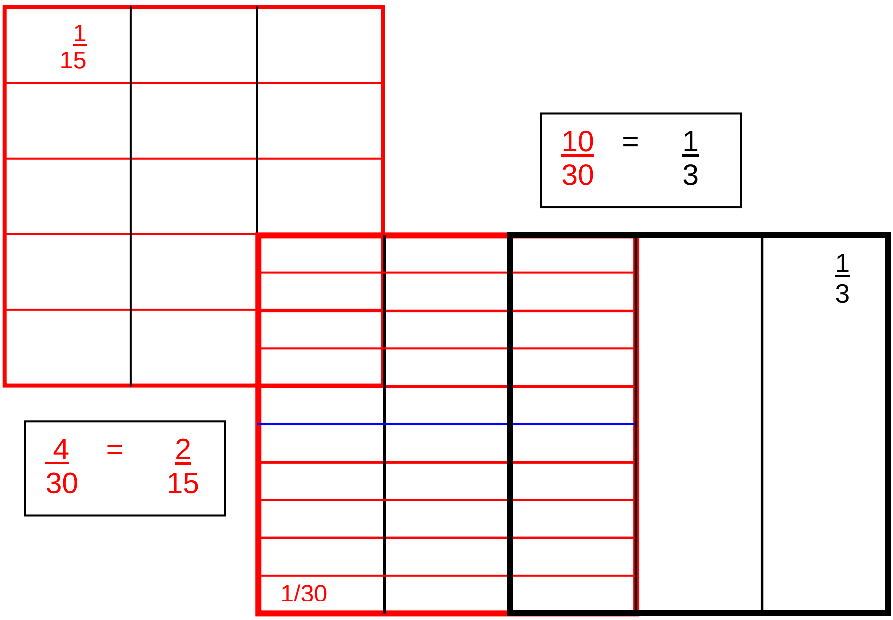
Semplifico $\frac{2}{3} : 4 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

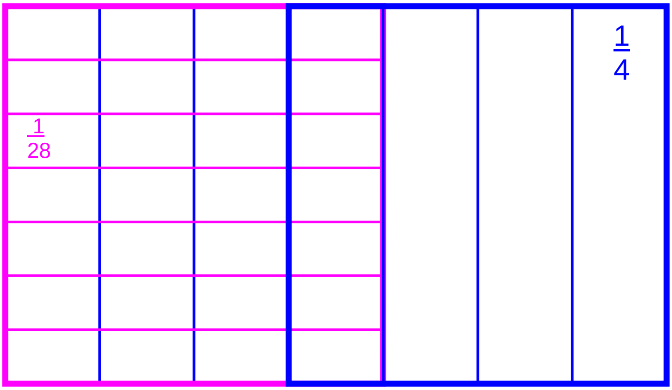
1 mezzo di 1 terzo *= 1 sesto*



Equivalenza tra frazioni

L'equivalenza di 2 frazioni si può visualizzare sovrapponendo 2 frazioni equivalenti raffigurate in 2 quadrati lucidi trasparenti del set lucido, frazionati in un solo senso e/o in entrambi i sensi.





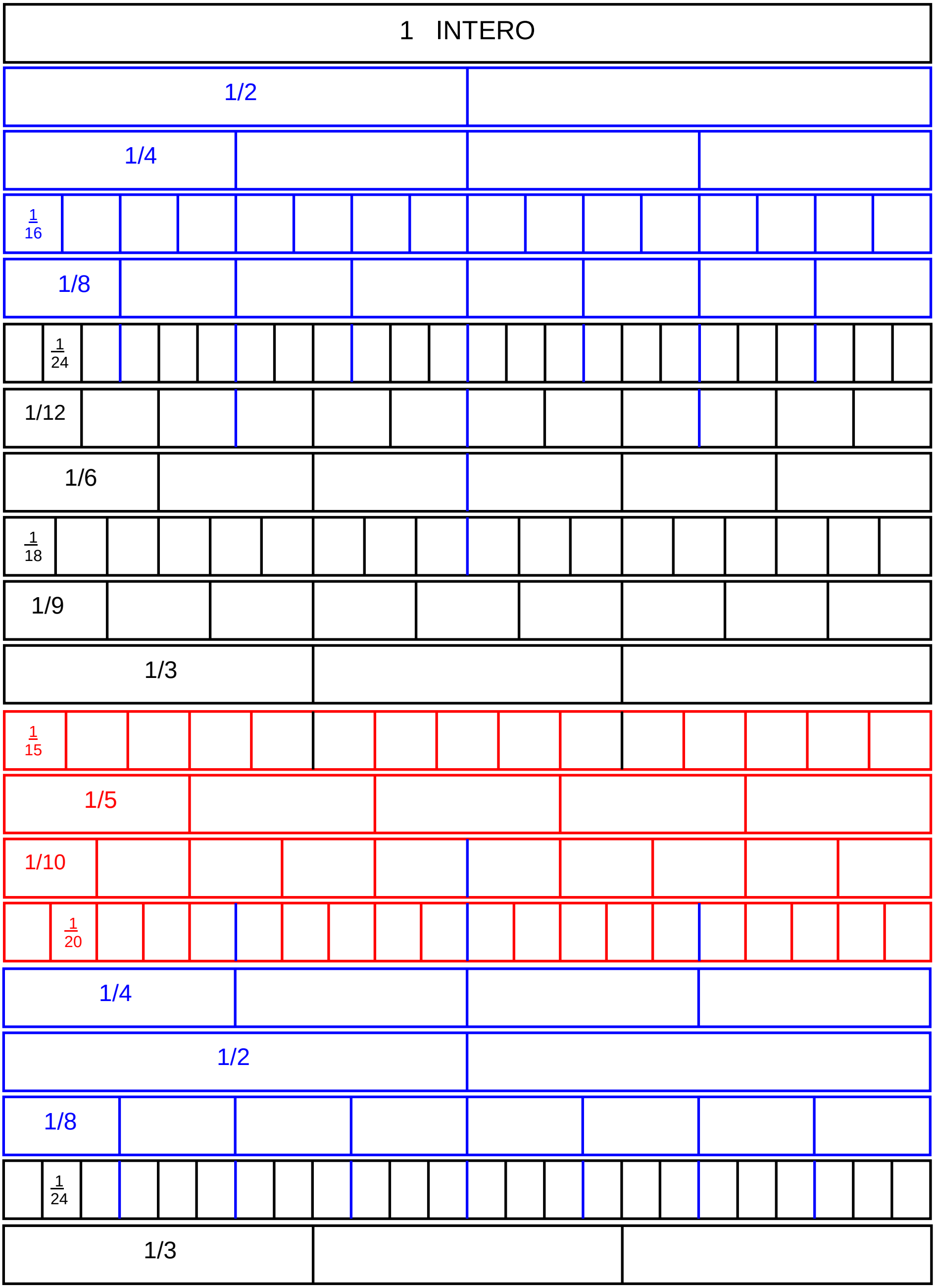
$$\boxed{\frac{7}{28} = \frac{1}{4}}$$

"Giocare a carte" con le frazioni

Con i quadrati del **set lucido concreto** si possono fare le equivalenze anche "***giocando a carte***", tra 2 o più alunni, dividendosi in ugual numero i quadrati del set come "carte" da gioco. Poi ognuno gioca un quadrato e il successivo può "*prenderne*" uno giocato se può farci **un'equivalenza** con un altro che ha in mano: *es. 3/3 prende 18/18, ma non 5/5*, ecc….**L'intero,** equivalente a **tutte le carte**, le prende tutte e viene preso da tutte.

Il SET LUCIDO è brevettato ed è stato pubblicato da:
1 -RAFFAELLO editrice, Monte San Vito, Ancona 1993.
2 -BREVETTO n.° 00232006 del 10 / 8 / '99.
3 -RIVISTA "L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate", n° 3, vol. 30A, maggio '07. Centro ricerche didattiche UGO MORIN.

SET LINEARE DELLE FRAZIONI - *Tavola sinottica*



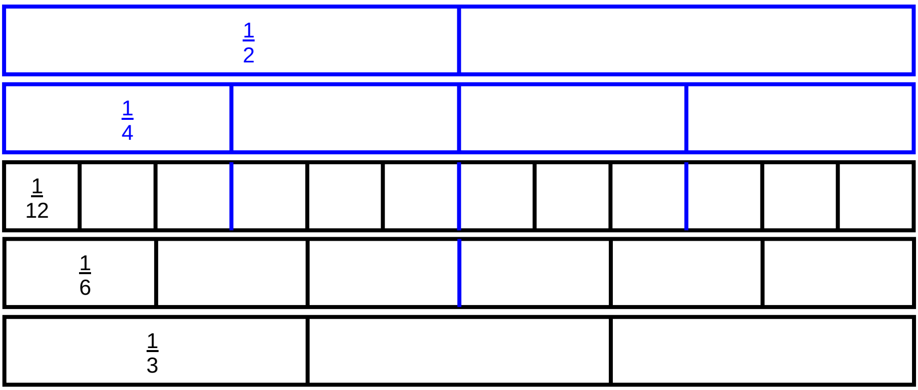
Equivalenze, addizioni e sottrazioni.

Il **set lineare** delle frazioni si compone di **strisce** uguali, frazionate dai 2/2 fino ai 30/30, con linee di colore diverso per i denominatori primi di *2/2 (azzurro), 3/3 (nero), 5/5 (rosso), 7/7 (violetto), 11/11 (verde), 13/13 (arancio),* e rispettivi **multipli.** Nelle figure-frazioni con denominatore **multiplo** di quelli primi suddetti, prevale, per l'intero perimetro, il colore del denominatore primo più grande: ad es. il *rosso di 5* prevale sull'*azzurro di 2,* ecc.

Con il set lineare si possono visualizzare e capire facilmente **equivalenze e confronti, addizioni e sottrazioni** tra le frazioni, con la **riduzione** ai minimi termini e al minimo comune denominatore, ed altri concetti come la frazione comple-mentare. All'inizio si può lavorare con le **singole strisce** separate, spostandole. Poi anche solo osservando le frazioni in **tavole sinottiche**, che si possono stampare per **ciascun alunno.**

Equivalenza *di frazioni e riduzione ai* ***minimi termini.***

3/12 = 1/4   *4/12 = 2/6 = 1/3*   *6/12 = 2/4 = 1/2*



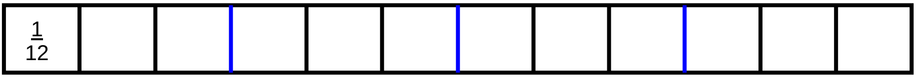
4/6 = 2/3   *3/6 = 1/2*   *10/12 = 5/6*

Addizioni, sottrazioni e scomposizioni

*di frazioni con **denominatore uguale***

4/12 + 3/12 = 7/12

9/12 – 5/12 = 4/12 = 1/3

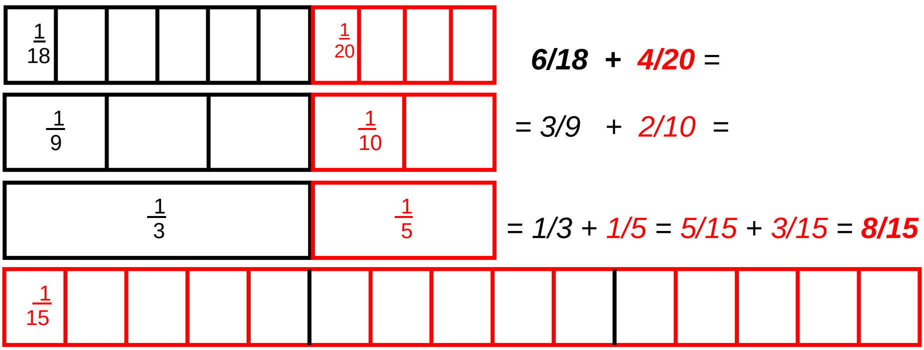


10/12 *= 6/12 + 4/12 = 5/12 + 5/12 = ecc…*

1 *= 12/12 = 8/12 + 4/12 = 5/12 + 5/12 + 2/12 = 4/12 per 3 volte.*

Addizioni e sottrazioni** di frazioni con **denominatore diverso

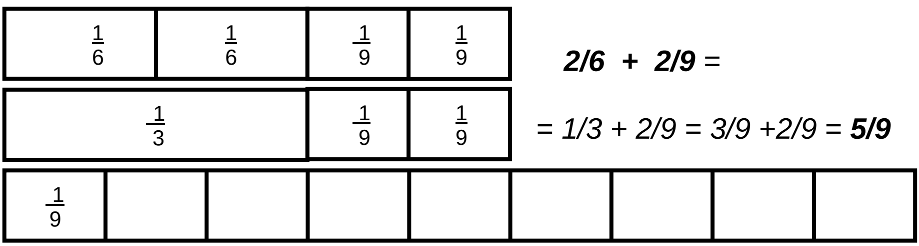
*e da ridurre ai **minimi termini***



6/18 + 4/20 *=*

= 3/9 + 2/10 =

= 1/3 + 1/5 = 5/15 + 3/15 = ***8/15***



2/6 + 2/9 *=*

= 1/3 + 2/9 = 3/9 +2/9 = ***5/9***

Negli esempi fatti si capisce chiaramente perché bisogna ridurre ai **minimi termini** e al **minimo comune denominatore** frazioni con denominatore diverso per poterle addizionare o sottrarre. Le operazioni e i concetti vengono facilmente compresi e consolidati mediante le **illustrazioni** e l'**applicazione** in esercizi pieni di **significato**. Sarà poi molto più facile capire le **regole generali** e l'uso dei **simboli astratti**, con numeri più grandi. Gli **esempi didattici** fatti sono ovviamente limitati e indicativi, per una eventuale utilizzazione critica da parte degli insegnanti, con gli opportuni adattamenti. Molti esempi si riferiscono soprattutto a obiettivi e contenuti della scuola secondaria di primo grado, ma ci sono anche utili spunti per un lavoro più semplice a partire dalla classe terza o quarta della scuola primaria.

"*Calcolo mentale*" con le frazioni

I due set, come altri sussidi, possono servire per "spiegare", ma anche e soprattutto per farci lavorare gli alunni. Essi consentono di fare con facilità, anche solo **oralmente,** equivalenze e operazioni con le frazioni, e cioè il **calcolo mentale** con le frazioni. Tale attività sottende **altri concetti,** come quelli di frazione complementare e propria, impropria e apparente. Nel calcolo mentale con le frazioni essi vengono acquisiti in modo **implicito,** operando: sarà poi facile esplicitarli. Infatti si visualizzano sempre l'intero e le sue unità frazio-narie, operando con esse, sia nell'ambito dell'intero (es. 1/5 + 2/5 = 3/5), fino all'intero stesso (es. 2/5 + 3/5 = 5/5), sia oltre l'intero (es. 3/5 + 4/5 = 7/5 = 1 intero + 2/5), ecc. E lo si fa comprendendone pienamente il significato. Infatti si fanno addizioni e sottrazioni con i **numeratori** che quantificano le **unità frazionarie** uguali, facendo prima l'equivalenza se sono diverse, visualizzando uno stesso denominatore comune, capendo e consolidando così in modo intuitivo anche il loro rapporto con l'intero.

Anche quando si fa ad es. 2 dm. + 5 cm. si addizionano 20 centesimi + 5 centesimi di 1 metro.

E’ un lavoro semplice ed efficace, ma per lo più estraneo alla pratica didattica perché si ritiene che le **operazioni** con le **frazioni** si debbano fare in **forma simbolica scritta** alla scuola secondaria di primo grado, con le regole ben note, magari spiegandole con qualche esempio concreto. Il quale però, spesso non basta per una comprensione più significativa e consolidata, come invece avviene con i set concreti. Essi rendono facili, familiari e “simpatiche” le frazioni stesse, come dicevano i miei alunni, perché nel farci il **calcolo mentale oralmente** esse vengono visualizzate, capite e nominate spesso, facendoci “confidenza.”

Gli alunni possono lavorare con i set, prima con la guida dell’insegnante, poi anche in modo autonomo, magari in coppia, aiutandosi, inventando equivalenze e operazioni, anche **solo oralmente** ed in tempi limitati. L’importante è che facciano **lavorare il cervello, verbalizzando** le operazioni, e non le definizioni astratte. L’insegnante può seguire gli alunni mentre lavorano, aiutando chi ne avesse bisogno, senza dover correggere tanti esercizi diversi, qualora fossero anche scritti. All’inizio si può lavorare un po’ con le **frazioni più semplici** e con le **singole strisce** del set lineare o i quadrati trasparenti del set lucido. Poi anche soltanto osservando le frazioni nella **tavola sinottica** completa del set lineare o in tavole sinottiche ridotte, che si possono stampare per ciascun alunno. Ovviamente i due set vanno usati in modo **graduale** secondo le capacità degli alunni, per riuscire poi più facilmente a lavorare anche con i simboli astratti capendone il significato.

Consolidare concetti e conoscenze: esercizi significativi.

Con i set si può rappresentare la soluzione di **alcuni problemi**, come già visto, e si possono fare “**esercizi**” molto utili perché significativi, come dice Hans **Freudenthal**: *“I fautori dell’ apprendimento attraverso l’intuizione sono spesso accusati di trascurare l’esercizio.*

Ma piuttosto che contro l'esercizio io sono contro l'abilità che danneggia il ricordo dell' intuizione. Ma vi è un modo di fare esercizio (incluso anche lo studio a memoria), in cui ogni piccolo passo aggiunge qualcosa al tesoro dell' intuizione: si tratta dell'esercizio accoppiato con l'apprendimento per intuizione." ("Ripensando l'educazione matematica", pag. 150).
Freudenthal sostiene l'utilità anche degli esercizi che consentono di approfondire e consolidare le intuizioni e la comprensione dei concetti e dei ragionamenti nella soluzione dei problemi. Si dice invece contrario alla *"abilità che danneggia il ricordo dell'intuizione",* e quindi agli esercizi mnemonici per acquisire tale abilità meccanica, che baipassano il pensiero, e inducono a trascurare "l'intuizione" e il ragionamento logico. Grazie agli esercizi significativi si possono invece approfondire e consolidare intuizioni, concetti e ragionamenti magari già compresi, ma ancora un po' labili ed incerti, per padroneggiarli e usarli meglio. Come afferma **Renzo Titone**, infatti, il "*super-apprendimento favorisce il transfer positivo*", cioè l'uso autonomo e originale di quanto appreso *"in situazioni complesse o per la soluzione di problemi."*

Michele Pellerey, su "*Orientamenti Pedagogici*", n° 3/'85, *"Verso una nuova stagione per la scuola?",* evidenzia l'importanza delle conoscenze capite e consolidate: *"In campo psicopedagogico, d'altra parte, si è costatata l'inadeguatezza di un'impostazione diretta solamente all' acquisizione di un metodo di lavoro, allo sviluppo di capacità di apprendere in generale, allo stimolo di atteggiamenti esplorativi globali. La psicologia cognitivista ha rilevato il ruolo decisivo che gioca in tutto questo il quadro concettuale posseduto, l'insieme cioè dei fatti, delle idee, dei principi, dei procedimenti resi propri in maniera significativa e coerentemente compaginata. Per risolvere problemi, per fare ricerche, per leggere e capire, per seguire i ragionamenti, occorre conoscere fatti, avere idee appropriate, possedere concetti adeguati, disporre di esperienze riflesse e rappresentate, e tutto questo non in generale, ma riferito specificamente al campo o settore della conoscenza preso in considerazione. Non basta essere intelligenti, si deve anche sapere, e sapere le cose in modo chiaro e pertinente."*

Di solito la comprensione e l'apprendimento non avvengono con la modalità del "*tutto o niente*", come spiega **Guido Petter**, ma richiedono approfondimenti progressivi. **Hans Aebli** infatti scrive: *"Le strutture mentali che il bambino costruisce col processo di elaborazione non hanno per nulla quella consistenza quasi concreta che Piaget ad esse attribuisce. (Ma anche Piaget parla di "decalages", "scarti", regressioni: n.d.a.). Appena in un processo appaiono fattori di maggiore difficoltà, l'operazione arretra a un livello strutturale più basso. Ciò dimostra quanto sia importante che i risultati di un processo di elaborazione vengano in qualche modo **consolidati** con adeguati **esercizi e applicazioni."***

Ma il transfer non avviene in modo automatico

Parlando dell'uso dei materiali strutturati **Silvia Sbaragli** evidenzia come l'uso di sussidi e materiali strutturati come quelli già visti, e quelli proposti da Dienes, Montessori e Castelnuovo, non basta ad attivare automaticamente il "*transfer*" cognitivo per risolvere problemi in altri contesti. E' perciò importante sollecitare il pensiero con problemi autentici e significativi in contesti diversi. La **Sbaragli** scrive: *"In questi ambienti gli allievi manipolano "materiale strutturato" in modo attivo e piacevole, in una situazione di forte interazione e dialogo tra allievi e fra questi e l'insegnante. Molto spesso però questi ambienti artificiali (strumenti e materiale strutturato), risultavano fini a se stessi, e portavano esclusivamente ad un apprendimento epidermico. Nel senso che, come sostiene D'Amore (1999), facendo uso di questi strumenti, raramente avviene che l'allievo posto di fronte ad un problema dello stesso tipo, ma in ambiente diverso, sia capace di trasferire il sapere da una situazione all'altra, in modo naturale, implicito, spontaneo, **senza richieste cognitive specifiche per la nuova situazione di apprendimento.***

*Ossia, il fenomeno del **transfer cognitivo** (su questo argomento si veda Ausubel, 1978) **non avviene in modo automatico**: da una conoscenza "artificiale" costruita su misura in un ambiente opportuno e specifico, alla conoscenza generalizzata, cioè alla capacità di produrre abilità cognitive e procedurali in altre situazioni (si veda anche Gagné, 1989). Le capacità cognitive e procedurali restano spesso ancorate all'ambito nel quale si sono raggiunte: non si sa trasferire la conoscenza, se non in casi particolari".*

(S. Sbaragli, "Riflessioni sull'uso acritico dei regoli (…)", su "L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate", vol. 31A, n° 5, settembre '08)

Ciò non toglie che la comprensione di importanti concetti grazie all'uso di efficaci materiali strutturati possa aiutare molto il trasfer cognitivo stesso, senza ovviamente esagerarne l'importanza e senza trascurare un lavoro specifico per affrontare problemi significativi in contesti diversi e non standardizzati, come ad es. i problemi delle prove INVALSI o altri analoghi.

"*Conversione*" o "*trasposizione*" di una rappresentazione dal concreto all' astratto, e viceversa, usando diversi registri di rappresentazione semiotica

Le equivalenze e le operazioni con le frazioni *rappresentate concretamente* con i due set, sono anche *verbalizzate* ed espresse con i *simboli matematici*, per "*caricare*" di significato il linguaggio verbale e i simboli matematici stessi, consolidandone l'associazione con i concetti ed i significati rappresentati con i set o altri sussidi. Con essi si usano i registri di rappresentazione semiotica iconico e cromatico (colore) associati con quelli verbale e simbolico, attuando la "*conversione*" o "*trasposizione*" della rappresentazione da un *livello intuitivo-concreto a quello simbolico-astratto* per favorire e consolidare la comprensione e l'astrazione.

***“Trattamento”* o *“traduzione”* di una rappresentazione in un’altra usando uno stesso registro di rappresentazione semiotica, concreto o astratto.**

E’ importante usare anche altri sussidi e rappresentazioni degli stessi concetti e operazioni, altri “*modelli intuitivi*”, come li definisce Fishbein, attuando così la *“traduzione”* da una forma a un’altra della rappresentazione, allo *stesso livello di astrazione*: da un’illustrazione a un’altra, da un grafico a un altro, da una verbalizzazione a un’altra, per esprimere gli stessi concetti. I 2 set infatti sono riduttivi, e perciò vanno integrati con altre rappresentazioni, come tutti i sussidi e le rappresentazioni concrete di concetti astratti, e tanto più di un concetto così complesso come le frazioni.

Modelli intuitivi di Fishbein e paradosso di Duval

Un uso appropriato e vario, ma non confuso e dispersivo, di sussidi didattici concreti favorisce il formarsi di significative **immagini mentali**, sia statiche che dinamiche, per rappresentare i concetti matematici sia come processi che come oggetti, secondo la teorizzazione di **A. Fard.**
Fishbein li chiama “*modelli intuitivi*”, in parte anche “impliciti”, che influenzano il pensiero. Essi costituiscono un solido ponte per la formazione dei concetti e per la comprensione dei simboli astratti. Se ne evidenzia l’importanza nel **paradosso di Duval,** così espresso da Radford: *“Il problema epistemologico si può sintetizzare nella domanda seguente: come possiamo giungere alla conoscenza di questi oggetti generali (i concetti: nota dello scrivente), dal momento che non abbiamo accesso ad essi se non attraverso rappresentazioni…? “ (In B. D’Amore, “La matematica e la sua didattica”, 4, 585-619)*

FRAZIONE COME *OPERATORE*

La frazione è un operatore che consente di calcolare il valore della frazione di un intero dal valore noto, e viceversa, con la regola nota. Ad es., con la frazione ***3/5 come operatore*** si possono risolvere i 2 problemi seguenti

Problema diretto - *Calcolare i **3/5 di 20***

*20 **: 5** (**denominatore**) x 3 (numeratore) = 12*
20 x 3/5 = 20 x 0,6 = 12

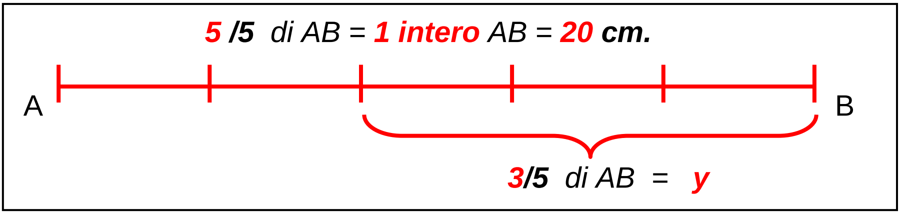
Problema inverso - *Il valore dei **3/5** di un intero **è 12.***
Calcolare il valore dell'intero.

*12 **:** 3 (numeratore) x **5** (**denominatore**) = 20*
12 : 3/5 = 12 : 0,6 = 20

La logica proporzionale senza i denominatori

I problemi suddetti si possono risolvere in **modo intuitivo,** abbreviato e "**difforme**", con la logica del tre semplice diretto senza denominatori, visualizzata in un **segmento frazionato.**

1-Problema diretto: *Calcolare i **3/5** di **20**.*



Il testo implica che **20 è il valore dell'intero 5/5**, che si può rappresentare con un segmento diviso in 5 parti uguali o unità frazionarie: esse non sono espresse nel testo verbale, che però le implica, e sono da inferire.

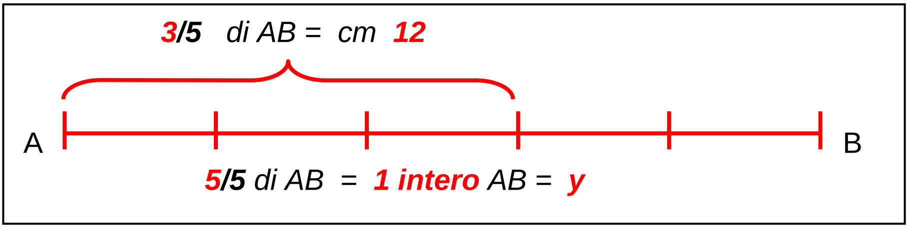
Per calcolare il valore di 1/5 si fa: *20 :*
***5** (numeratore di **5/5**) = 4*.
Infatti i quinti dell'intero sono 5, quantificati dal numeratore 5 della frazione apparente 5/5, che esprime l'intero, non esplicitata nel testo, che però la implica, e va inferita.

Per calcolare poi il valore di *3 quinti* si fa
4 x 3 (numeratore di 3/5) = 12.

Perciò, con la logica del 3 semplice diretto riferita ai soli numeratori e ai valori delle frazioni, si può fare anche:

*20 **:** **5** (numeratore di 5/5) x 3 (numeratore di 3/5)= 12*

2-Problema inverso: *I **3/5** di un segmento misurano **12** cm.*
*Quanto misura **l'intero segmento**?*



Poiché il valore di 3 quinti è 12, per trovare il valore di 1 quinto si fa 12 : 3 (numeratore di 3/5) = 4.

Per calcolare poi il valore dell'intero 5 quinti si fa 4 x **5 (numeratore di 5/5)** = 20.
I quinti dell'intero, infatti, sono 5, quantificati dal **numeratore 5** della frazione 5/5, non esplicitata nel testo, che però la implica, e va inferita. Perciò, con la logica del 3 semplice diretto riferita ai soli numeratori e ai valori delle frazioni, si fa:

12 : 3 (numeratore di 3/5) ***x 5*** *(numeratore di 5/5) = 20*

Le operazioni e i numeri sono **sempre gli stessi** in entrambi i procedimenti: quello che cambia è il significato di uno dei numeri, (es. 5). Il quale, nella frazione come operatore (es. 3/5), è sempre denominatore.
Con la logica del 3 semplice diretto già vista, invece, è sempre numeratore della frazione apparente (es. 5/5) che esprime l'intero. Essa non è esplicitata nel testo, che però la implica, e perciò va inferita ed esplicitata, come si fa quando si rappresenta il problema con un segmento frazionato. In questo, infatti, si visualizzano le parti uguali, o unità frazionarie, non solo della frazione (es. 3/5) esplicitata nel testo, ma anche della frazione apparente (es. 5/5) che esprime l'intero, non esplicitata nel testo.
Nel segmento frazionato, perciò, le parti uguali (es. 5 quinti) in cui esso è suddiviso, e quelle di una sua frazione (es. 3 quinti), sono tutte ben visualizzate e indicate dai numeratori (es. 5 e 3), in rapporto con le misure corrispondenti, di cui una nota e l'altra da calcolare.
Per "spiegare" tali problemi si usa spesso un segmento frazionato, in cui è presente la logica del 3 semplice diretto. Ma si enuncia e si insegna la regola della frazione come operatore, perché le operazioni e i numeri sono sempre gli stessi. Infatti il numeratore (es. 5) della frazione che esprime l'intero (es. 5/5) è sempre uguale al denominatore (es. 5): si può dire che fanno un tutt'uno. Il numeratore inoltre "dipende" dal denominatore, perché è il denominatore che determina in quante parti uguali è suddiviso l'intero, "denominandole", anche se è il numeratore che le quantifica. E questo può indurre a ragionare con il 3 semplice diretto senza il denominatore, in modo "contratto" ma funzionale: una specie di **"scorciatoia" in senso vietato.**

Tre semplice diretto

1- *Problema* ***diretto***	2 - *Problema* ***inverso***
1 quinto = ? 2 quinti = ? ***3*** *quinti* = ***y*** 4 quinti = ? ***5*** *quinti (1 intero)* = ***20*** 6 quinti = ? etc.	1 quinto = ? 2 quinti = ? ***3*** *quinti* = ***12*** 4 quinti = ? ***5*** *quinti (1 intero)* = ***y*** 6 quinti = ? etc.
5 : 20 = 3 : y	***3 : 12 = 5 : y***

Come si vede dalla tabella, in una serie di frazioni dello stesso intero, e con lo stesso denominatore, se la quantità delle unità frazionarie di ciascuna frazione, indicata dal *numeratore,* diventa *doppia, tripla, quadrupla* ecc…lo diventa anche il *valore delle corrispondenti frazioni*, il cui denominatore, essendo costante, non incide affatto sui valori delle frazioni stesse. Tali valori perciò dipendono solo dai *numeratori variabili*. Perciò, conoscendo il valore di una frazione qualsiasi, compresa quella apparente che esprime l'intero (es. 5/5), si può calcolare il valore di tutte le altre frazioni dello stesso intero, e con lo stesso denominatore, dividendo il valore noto di una frazione ***diviso il numeratore*** della stessa, e moltiplicando il risultato ***per il numeratore*** della frazione di cui si vuol trovare il valore. Verrebbe meno così la *distinzione tra problemi diretti e inversi*, e il procedimento risolutivo sarebbe *sempre lo stesso,* come ad es. nei seguenti problemi:
"Se 5 penne costano 20 euri, quanto costano 3 penne?
E 7 penne?"
E viceversa: "Se 3 penne costano 12 euri, quanto costano 5 penne? E 8 penne? " Dove al posto delle unità frazionarie, (es. i *"quinti*"), ci sono le penne.

Tale procedimento è coerente e *“funziona*” anche se è “*monco*”, perché **esclude il denominatore**, che invece non può essere escluso poiché è un termine essenziale della frazione, come già detto, sempre presente nei *calcoli formali.* In questi, i numeratori possono diventare denominatori (nella divisione), e viceversa, ed essere semplificati o elidersi se uguali, tenendo conto della *loro posizione* (sopra o sotto), piuttosto che del loro significato.
Proprio il significato del numeratore, invece, e la sua funzione, possono indurre a ragionare con la logica intuitiva del 3 semplice diretto già vista, escludendo però arbitrariamente il denominatore. E tuttavia, pur essendo difforme, la soluzione intuitiva fondata sul 3 semplice diretto senza il denominatore ha una sua coerenza che assicura risultati esatti, e mi sembra possa far riflettere e far capire meglio alcuni concetti.

3 -Problema ***composto***

Da una ***frazione*** *(all’* ***intero*** *e dall’* ***intero****) a un’altra* ***frazione***

1 quinto = ?
2 quinti = *?*
3 *quinti* = ***y***

4 quinti = ?
5 quinti (intero) = z
6 quinti = ?
7 *quinti* = ***28***

8 quinti = *?*
Ecc….

7 : 28 = 3 : y = 5 : z

Nel problema in tabella non si fa alcun riferimento all'intero, ma soltanto a due frazioni di esso, 3/5 e 7/5, con lo stesso denominatore. E' evidente che per trovare il valore di 1 quinto si fa 28 : 7 = 4
E per trovare valore di 3 quinti, si moltiplica 4 x 3 = 12

Se no, con la frazione come operatore, tale problema risulta composto da 2 problemi, uno inverso e l'altro diretto. Infatti si deve prima calcolare il valore dell'intero 5/5 conoscendo il valore 28 della sua frazione 7/5, facendo 28 : 7 x 5 = 20.
Poi il valore dei 3/5 dell' intero, facendo 20 : 5 x 3 = 12.
In sintesi, 28 : 7 x 5 : 5 x 3 = **28 : 7 x 3 = 12**

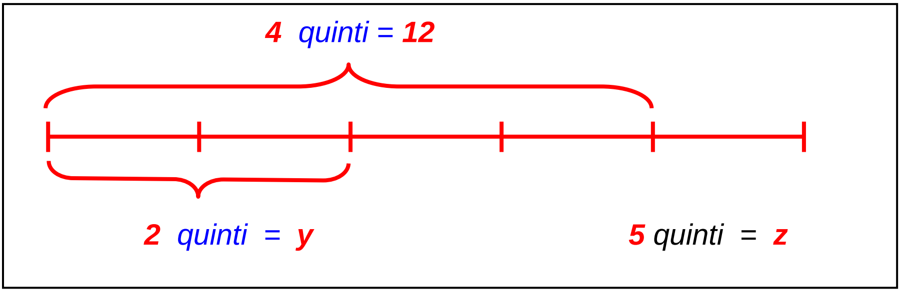
Sono le stesse operazioni con gli stessi numeri e lo stesso risultato della soluzione intuitiva iniziale, che si ottengono anche dalla proporzione con i numeratori e i valori delle frazioni 7 : 28 = 3 : y ; da cui 7 y = 28 x 3;
ed infine y = **28 : 7 x 3 = 12**
Per correttezza formale si devono includere nella proporzione anche i denominatori: 7/5 : 28 = 3/5 : y
E con l'intero: 7/5 : 28 = 3/5 : y = 1 (5/5) : z

Sviluppandola si ottengono gli stessi risultati con gli stessi passaggi già visti usando la frazione come operatore.
Si ritrova così, anche con la proporzione, il **linguaggio formale** con le sue regole, e con i **denominatori**, che essendo **uguali, nel calcolo si elidono:** e nella soluzione intuitiva si capisce anche perché "**non servono**", grazie alla semplicità dei dati e del problema. La soluzione-comprensione intuitiva può così illuminare in parte anche i passaggi del linguaggio formale, ma diventa sempre più difficile se aumenta la complessità dei problemi e dei dati, che rende perciò necessario l'uso formale del linguaggio matematico.
Anche il problema che segue ha la stessa struttura logica di quello già visto, ed è ancora più semplice e significativo.

Problema: ***un cucciolo in pista***

Anche questo problema ha la stessa struttura logica di quello già visto, e si risolve facilmente in modo intuitivo.
In esso infatti non si fa alcun riferimento all'intero, ma soltanto a 2 frazioni di esso (che è peraltro anch'esso una frazione apparente), con lo stesso denominatore, evidenziando la proporzionalità diretta tra i numeratori e i valori delle frazioni dello stesso intero aventi lo stesso denominatore.

Giorgio ha percorso in bicicletta 12 km che sono i 4/5 di una pista ciclabile, mentre il suo cucciolo, rincorrendolo, ne ha percorsi i 2/5. Quanti km ha percorso il suo cucciolo?



Soluzione

E' evidente che per trovare il valore di 1 quinto della pista si fa 12 : 4 = 3

E per trovare il valore di 2 quinti della pista stessa si moltiplica 3 x 2 = 6 km

Se no, con la frazione come operatore, il problema risulta composto da un *problema inverso e uno diretto*, e si deve calcolare:

-prima il valore di 5/5, di tutta la pista: 12 : 4 x 5 = 15;

-poi il valore dei suoi 2/5, cioè 15 : 5 x 2 = 6.

In sintesi: 12 : 4 x 5 : 5 x 2 = 12 : 4 x 2 = 6

Sono le stesse operazioni con gli stessi numeri e lo stesso risultato della soluzione intuitiva iniziale, che si ottengono anche dalla proporzione con i numeratori e i valori delle frazioni 12 : 4 = y : 2

Per correttezza formale si devono includere nella proporzione anche i denominatori: 12 : 4/5 = y : 2/5.

E con l'intero 12 : 4/5 = y : 2/5 = 1 (5/5) : z.

Sviluppandola si ottengono gli stessi risultati con gli stessi passaggi già visti usando la frazione come operatore.

Si ritrova così, anche con la proporzione, il **linguaggio formale** con le sue regole, e con i **denominatori**, che essendo **uguali, nel calcolo si elidono:** e nella soluzione intuitiva si capisce anche perché "**non servono**", grazie alla semplicità dei dati e del problema.

La soluzione-comprensione intuitiva può così illuminare in parte anche i passaggi del linguaggio formale, ma diventa sempre più difficile se aumenta la complessità dei problemi e dei dati, che rende perciò necessario l'uso formale del linguaggio matematico.

Uno strano divorzio

Nella soluzione intuitiva e "difforme" considerata si esclude il denominatore tenendo conto soltanto del significato e della funzione del numeratore. Si provoca così, a causa della semantica, un "*divorzio*" tra i 2 termini della frazione, che il rigore matematico non ammette, poiché il denominatore è un termine essenziale della frazione. E si potrebbe dire: "*La semantica non separi ciò che la matematica ha unito*."
Ma il matematico René Thom, medaglia Field nel '58, osserva: *"Si accede al rigore assoluto solo eliminando il significato. Ma se si deve scegliere tra rigore e significato, scelgo quest'ultimo senza esitare."*
Il significato del simbolo 3/5 è espresso dalle parole con cui si verbalizza, che di solito sono *"tre quinti."* Ma si può anche verbalizzare con le parole *"tre su cinque",* e cioè "*3 quinti su 5 quinti."* In tal caso *"cinque"* è un *numero cardinale, come il numeratore 3*, e quantifica le 5 parti uguali dell'intero, cioè i *"quinti."* Dicendo "*tre su cinque"*, questo *"cinque*" viene ad assumere il significato di numeratore della frazione 5/5, (cinque quinti), che esprime l'intero.
Il denominatore, inoltre, si scrive, e si usa nei calcoli, come **cardinale** (es. 5) e si verbalizza di solito come **ordinale** (es. quinti), in modo **ambiguo,** e ciò può confondere. "Cinque" e "quinti" sono due parole diverse che esprimono concetti diversi, e possono condurre a ragionamenti diversi.
La verbalizzazione dei simboli e dei numeri, infatti, ne esprime e precisa i significati sui quali si fonda, o si dovrebbe fondare, il ragionamento. E tenendo conto di tali significati si possono talvolta trovare soluzioni diverse e un po' "singolari", difformi rispetto a quelle previste dalle regole, che, per i problemi considerati, è la regola della frazione come operatore.

Ma come già detto, anche con la diversa soluzione intuitiva basata sul 3 semplice diretto, con la proporzione, si ritrova infine, e si deve usare, il linguaggio formale con le sue regole, che è imprescindibile. E’ perciò molto importante appren-dere bene tali regole, che fondano il mirabile edificio del linguaggio matematico, a livelli di astrazione e complessità sempre maggiori. E quando tali livelli aumentano, l’intuizione del significato legato all’ esperienza diventa inevitabilmente sempre più difficile. Ma, come dice René Thom, nonostante ciò, o forse proprio per ciò, si deve cercare di favorirla il più possibile, per evitare il verbalismo ed il formalismo astratti e mnemonici, e favorire il pensiero autentico. (Un bell’esempio si trova in “Geometria dinamica”, “Bravo Aurelio!”)

Le riflessioni esposte direi che sono un po’ “singolari”, e potrebbero comprensibilmente non essere condivise. Ma mi sembrano motivate e forse potrebbero servire, almeno in parte, per capire meglio alcuni concetti e orientare in modo più consapevole, con semplicità e gradualità, l’attività didattica: senza complicazioni inutili, ma, nei limiti del possibile, anche senza confusioni, semplicismi e surrogati verbalistici e mnemonici. E sono ovviamente gli insegnanti che decidono e sanno come farlo, con autonomia di giudizio ed intelligente buon senso, cercando di vagliare e maturare criticamente conoscenze e competenze sempre più adeguate al loro non facile compito. Anche ignorando, eventualmente, le “singolari” riflessioni fatte in questo capitolo.

Semantica e sintattica: **un “*pro-f-ec-ondo”* connubio.**

Se si verbalizzano i simboli matematici, rappre-sentando anche concretamente i concetti che essi esprimono, se ne comprende meglio il significato. Ciò consente di ragionare in base ad esso, con un approccio “*semantico*”, più intuitivo, aperto anche a percorsi diversi ed eventuali “scorciatoie” intuitive, come già visto, ma che vanno poi ricondotti sui rigorosi “*binari*” del linguaggio formale. Che però forse in tal modo sarà più carico di significato.

Il linguaggio matematico è per sua natura “*sintattico*” formale, dal rigore assoluto e di potenza straordinaria, con il rischio però di apparire a molti “*un gioco astratto di simboli formali”,* senza capirne il significato ed il collegamento con la realtà.

Ciò in parte è inevitabile e normale, specialmente ai livelli più alti e complessi, ma come dice il matematico René Thom: *“Si accede al rigore assoluto solo eliminando il significato. Ma se si deve scegliere tra rigore e significato, scelgo quest’ultimo senza esitare.”*

Ovviamente la cosa migliore è cercare di realizzare un “*pro-f-ec-ondo”* connubio tra rigore e significato, lasciando che il significato stesso possa illuminare e mostrarci anche orizzonti più ampi ed eventuali “scorciatoie” intuitive, senza però smarrire mai la strada maestra, come si è cercato di fare con i problemi considerati, non senza dubbi, perplessità e ripensamenti.

Problema: il volo del calabrone

Anche nel seguente problema di Gamow è possibile una soluzione semplicissima, direi tautologica, basata sul significato delle parole e del testo, a livello concettuale "*semantico*". Altrimenti sarebbe necessario ricorrere all' algoritmo formale-sintattico della *progressione geometrica*.

Due treni partono contemporaneamente da due stazioni A e B, situate a 160 km di distanza 1'una dall'altra e si dirigono l'uno verso l'altro alla velocità di 80 km all'ora.
Un calabrone parte nello stesso istante da A e si dirige verso B seguendo la via ferrata con una velocità di 100 Km all'ora.
Quando incontra il treno proveniente da B prende paura, inverte la marcia e riparte in direzione di A.
Vola così da un treno all'altro, finché questi si incrociano e il calabrone fugge via. Qual è la distanza totale percorsa dal calabrone nei suoi andirivieni ?

Soluzione

Poiché i 2 treni corrono ciascuno a 80 km l'ora, dopo un'ora avranno percorso fra tutti e due 160 km e quindi, essendo partiti a 160 km di distanza, si incroceranno.
Poiché il calabrone ha volato per tutto quel tempo, cioè per un'ora, a 100 km l'ora, avrà percorso 100 km.

Vittorio Duse osserva: *"Se ci si prova a risolvere il problema seguendo i singoli voli e le singole virate del calabrone, si trova la stessa risposta come somma di una progressione geometrica di ragione 1/9, ma con un procedimento molto più complesso.*

Anche ammettendo che una macchina possa risolvere tale problema, lo farà solo dopo aver avuto dall'uomo le opportune istruzioni e col metodo più meccanico e lungo. Ma nella mente dell'uomo cos'è che muove il pensiero in primo luogo verso la risoluzione e poi verso un tipo di risoluzione piuttosto che verso un altro? " (Vittorio Duse, "Per un insegnamento moderno della matematica elementare", La Scuola)

Problema: *settimana corta dell'età*

Il seguente problema riguarda un *contenuto molto familiare* ed è formulato con un *linguaggio ordinario* diverso da *quello matematico*. Ciò può aiutare a capire meglio i concetti matematici, ma può anche disorientare chi non è abituato a collegare il linguaggio matematico con quello ordinario, per rendere il linguaggio matematico stesso più significativo e comprensibile.

Senza *contare i* ***sabati e le domeniche*** *io avrei* ***40 anni.*** *Quanti anni ho io in tutto contando anche i sabati e le domeniche ?*

Soluzione

La prima idea che di solito viene in mente è quella di calcolare tutti i giorni tolti in 40 anni, per poi trasformarli in anni e aggiungerli ai 40, moltiplicando 2 giorni per le 52 settimane di ogni anno, per 40 anni. Ma i giorni sono stati tolti non da 40 anni, bensì dall' età totale effettiva, che è quella da trovare, perciò tale procedimento è errato.

Considero invece che **1 giorno è 1 settimo** di un'intera settimana, che è formata da **7 settimi**. Senza il sabato e la domenica prendo 5 giorni per ogni settimana, cioè **5 settimi,** che corrispondono a **40 anni** dell' età totale. Si deve perciò calcolare il valore dell'intero 7/7 conoscendo il valore 40 di 5/7: è quindi un problema inverso con le frazioni.

Perciò *1 settimo dell'età totale = 40 : 5 = 8 anni*
7 settimi = 8 x 7 = 56 anni in tutto

Se pongo y = età totale posso impostare la proporzione:
40 : 5 = y : 7 ; da cui *5 y = 40 x 7 ;*
ed infine *y = 40 : 5 x 7 = 8 x 7 = 56*

E' anche possibile calcolare i giorni tolti, e poi trasformarli in anni "*corti*" e aggiungerli ai 40 anni, anch'essi "*corti*" dichiarati.

Questi 40 anni, infatti, sono formati da *5 giorni x 52 settimane = 260 giorni* ogni anno "*corto*", togliendo così 105 giorni dai 365 di ogni anno reale, formato da 52 settimane più 1 giorno. In tutto perciò sono stati tolti *105 giorni per 40 anni = = 4200 giorni.*

Questi 4200 giorni tolti in tutto vanno trasformati in anni "*corti*", di 260 giorni ciascuno, come quelli dichiarati, dividendo *4200 giorni : 260 giorni = 16 anni* "*corti*" (resto 34 giorni).

Questi 16 anni "*corti*" sono quelli che sono stati tolti dall'età totale, e perciò vanno aggiunti ai 40 anni "*corti*" dichiarati, per trovare l'età totale stessa, che perciò sarà di *40 anni + 16 anni = 56 anni*, con approssimazione di alcuni giorni.

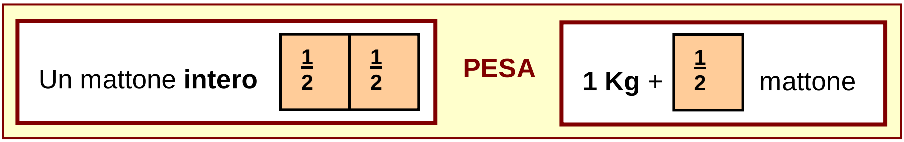
Problema: ***il peso del mattone***

Il testo del problema che segue è formulato in modo da trarre in inganno, con un uso fuorviante delle parole, che inducono a pensare in modo errato, cortocircuitando il ragionamento logico, e a rispondere: 1 e mezzo.

Un mattone pesa ***1Kg più mezzo mattone****: quanto pesa il mattone?*

Soluzione

Il testo è un'equazione verbale: rappresentata con il disegno è molto più intuitiva e facilita la soluzione.



Si vede infatti chiaramente che, nel secondo membro, al posto di mezzo mattone c'è 1 kg. Perciò

1 mezzo *del mattone = 1 Kg,*

2 mezzi *del mattone, (cioè 1 mattone intero) = 2 Kg*

Emma Castelnuovo, nel libro *"Didattica della matematica"*, mostra come gli alunni riescono a risolvere molto più facilmente i problemi di **rapporto** con l'uso di stecchini, mentre il disegno viene spesso fatto male e risulta perciò inutile o fuorviante.

Esempio: *"Un triangolo isoscele ha **la base** che è i **2 terzi** del lato **obliquo.** Il suo **perimetro** misura **80 metri.** Quanto sono lunghi i lati obliqui e la base?"*

Se si **costruisce** il triangolo con **stecchini** uguali si visualizza il rapporto e si intuiscono facilmente le operazioni da compiere.

*BASE = 2 stecchini = **2 terzi** del lato obliquo*

*BASE **:** LATO OBLIQUO = 2 **:** 3*

Ed ecco un problema analogo, ma più semplice: *"Un triangolo isoscele ha la **base** che misura la metà del lato **obliquo.** Il suo **perimetro** misura **50 m.** Quanto misurano i lati obliqui e la base?"*

In quarta elementare gli alunni lo trovano alquanto difficile: con gli **stecchini** diventa molto più facile.
Emma **Castelnuovo** osserva: *"E lo **stecchino**, questo materiale da nulla, assume per il bimbo un **valore enorme:** è il mezzo per risolvere dei problemi **costruendo e contando,** operazioni, queste, che **impongono** di **non verbalizzare."***

Ma sarebbe più esatto dire che esse *"non **richiedono** di verbalizzare."* Ed è importante anche **verbalizzare** le rappresentazioni concrete, e non le definizioni astratte, (vedi esempi alle prossime pagine), con parole e locuzioni che in tal modo si caricano di significato, e perciò sarà facile poi capirle quando si leggeranno nei testi, anche senza la rappresentazione concreta: questa infatti sarà stata interiorizzata come immagine mentale associata alla verbalizzazione, e, grazie a ciò, sarà facile anche riprodurla concretamente, e capire meglio le operazioni da fare per risolvere il problema.

Per assicurare la piena **comprensione** del testo, infatti, è molto importante,

sia

rappresentare **concretamente** il problema,

sia **l'inverso**, e cioè

verbalizzarne la rappresentazione concreta,

con parole piene di significato per evitare il vuoto **verbalismo**, del quale la **verbalizzazione significativa** è il miglior antìdoto: aumentando questa diminuisce quello.

Molto importante è anche la **verbalizzazione del procedimento risolutivo**, per mantenerne il **controllo**, che è un significativo traguardo per lo **sviluppo delle competenze** previsto dalle Indicazioni.

Perciò attenzione! I **sussidi concreti** sono molto importanti, ma non devono far trascurare il **linguaggio verbale** e i **simboli matematici.** Anzi: ne devono costituire un potente **trampolino di lancio.**

Rappresentare, capire, verbalizzare

Il concetto di rapporto e i problemi con lo stesso sono difficili anche perché **estranei** all'esperienza degli alunni, che non capiscono il **significato** del testo, come avviene anche per altri problemi e argomenti. A ciò si può ovviare facendo **costruire**, **capire** e **verbalizzare** vari rapporti. In tal modo il concetto di rapporto diventa **familiare** agli alunni, che così **afferrano** il **significato** delle parole e sono poi in grado di comprendere **i testi** verbali e tradurli in appropriate **rappresentazioni** significative, sia scritte che mentali. Le quali, come dice Bruno **D'Amore**, costituiscono *"**l'anticamera logica** della soluzione",* e consentono di trovare facilmente i procedimenti risolutivi e di capire **perché** si fanno certe operazioni e si applicano certe regole e formule.

Elena Valenti, nel libro *"La matematica nella nuova scuola elementare*", afferma: *"la **comprensione** di un problema....ha **in sé già presente** un primo, forse ancora intuitivo, abbozzo del **procedimento di risoluzione."***

Ovviamente è indispensabile anche avere compreso **il significato delle operazioni,** del linguaggio e dei concetti logico-matematici: ma la comprensione del testo e una chiara rappresentazione può aiutare molto il ragionamento logico-matematico.

*(Vedi **"Problemi"** e "**Apprendimento-insegnamento"**, punto 6-LA COMPRENSIONE DEL SIGNIFICATO E' ALLA BASE DEL RAGIONAMENTO)*

Rappresentare, capire, verbalizzare

Molto importante è la **verbalizzazione** orale significativa, con cui si esprimono i concetti e i significati rappresentati con il **disegno** o i **sussidi** concreti. Grazie alla verbalizzazione l'alunno sarà poi in grado di fare il processo **inverso**, e cioè di comprendere pienamente il **significato** dei **testi** verbali, e tradurli in **disegni** o **rappresentazioni** significative, che, come già detto, Bruno **D'Amore** considera ***"l'anticamera logica*** *della soluzione",* poiché consentono di capire le **regole** e trovare i **procedimenti risolutivi** in modo logico, autonomo e consapevole, a volte anche originale.

Perciò attenzione! I sussidi e le rappresentazioni grafiche sono molto importanti, ma non devono far trascurare il **linguaggio** verbale e i **simboli** matematici. Anzi, ne devono costituire un potente **trampolino di lancio**, riempiendo di **significato** le parole ed i simboli astratti, come un prezioso **carburante** che alimenta i processi mentali logici, analogici e creativi. E il linguaggio verbale e simbolico, sarà tanto più pieno di significato quanto più si saranno curate adeguatamente la verbalizzazione e la simbolizzazione riferite all'esperienza e alle rappresentazioni concrete, in "**presa diretta**" con il **pensiero**.

Vediamo **un esempio** di **verbalizzazione**.

Ad es., si fa costruire con gli stecchini, (o disegnare), un rettangolo, che si può anche proiettare, e si fa **verbalizzare il rapporto** tra la base e l'altezza e viceversa, per capire bene il significato delle parole e dei simboli usati. Lo stesso ovviamente si può fare con **altre figure e altri rapporti** e dimensioni.
Tale attività è molto efficace per **comprendere** poi altri **testi verbali** di problemi con i rapporti, ed il procedimento risolutivo.

Costruire *con stecchini o fiammiferi* **Proiettare**: lavagna luminosa	***h : b = 3 : 5*** ***h : 3 = b : 5*** ***b : h = 5 : 3*** ***b : 5 = h : 3*** *ALTEZZA =* ***3 quinti*** *della base*

BASE = ***5 quinti*** *(intero)*

Si può **verbalizzare e concettualizzare** in vari modi la **stessa** rappresentazione concreta, **invertendo i rapporti**, nel modo seguente.

L'ALTEZZA sta alla BASE	*come*	***3*** *sta a* ***5***
La BASE sta all'ALTEZZA	*come*	***5*** *sta a* ***3***
La BASE sta a ***5***	*come*	*l'ALTEZZA sta a* ***3***

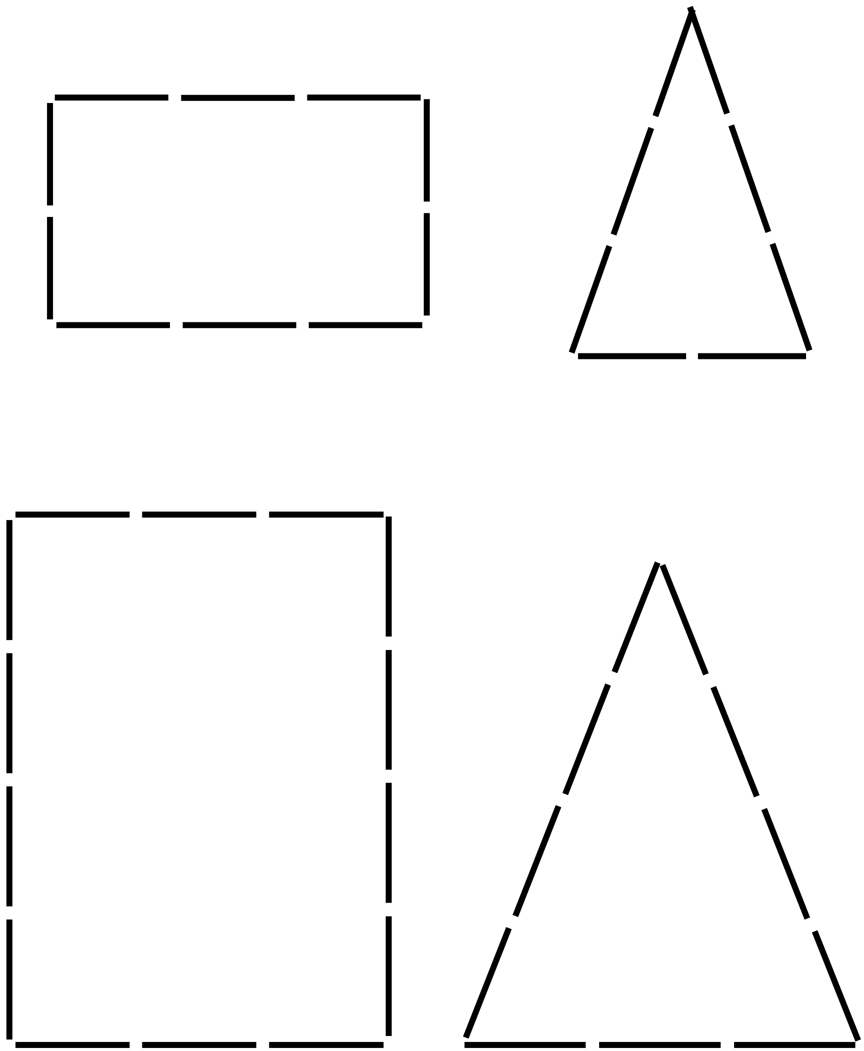
La BASE è ***5 fiammiferi****, cioè* ***5 quinti****;*
1 fiammifero è ***1 quinto*** *della base;*
l'altezza è ***3 quinti*** *della base****;***
il perimetro è ***16 quinti*** *della base****.***

L' ALTEZZA è ***3 fiammiferi,*** *cioè* ***3 terzi;***
1 fiammifero è ***1 terzo*** *dell'altezza;*
la base è ***5 terzi*** *dell'altezza;*
il perimetro è ***16 terzi*** *dell'altezza.*

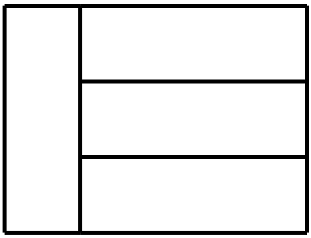
Il PERIMETRO è ***16 fiammiferi****, cioè* ***16 sedicesimi****;*
1 fiammifero è ***1 sedicesimo*** *del perimetro;*
la base è ***5 sedicesimi*** *del perimetro;*
l'altezza è ***3 sedicesimi*** *del perimetro.*

Verbalizzare i rapporti

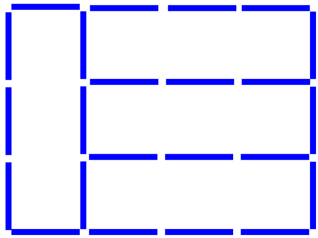
Verbalizzare i rapporti diretti e inversi tra la **base e l'altezza** dei 2 rettangoli e tra la **base e il lato obliquo** dei 2 triangoli isosceli, come nella pagina precedente.



*PROBLEMA - La **scatola disegnata** ha 4 scomparti uguali. Il suo **perimetro è 70 cm**. Calcolarne l' area.*



Scatola disegnata



Costruita con stecchini uguali

Costruendo la scatola con degli stecchini uguali la soluzione è molto più facile. Si vede infatti che il lato grande dello scomparto verticale coincide con 3 latini piccoli dei 3 scomparti orizzontali e con l'altezza (lato minore) della scatola; perciò la sua base (lato maggiore) corrisponde a 4 latini piccoli.
E il perimetro a 4 + 3 + 4 + 3 = 14 latini piccoli degli scomparti.

Con il linguaggio matematico.
L'altezza della scatola è 3/4 della base, che è 4/4, e la loro somma è 4/4 + 3/4 = 7/4 della base.
E viceversa la base è 4/3 dell'altezza, che è 3/3, e la loro somma è 3/3 + 4/3 = 7/3 dell'altezza.
Il perimetro è 14/3 dell'altezza o 14/4 della base.
Dividendo il perimetro, 70 cm, diviso in 14 parti uguali, si ottiene 5 cm, che è la misura di un latino piccolo degli scomparti. Ecc…

70 cm : 14 = 5 cm (misura latino piccolo scomparti)

5 cm x 3 = 15 cm (altezza: lato minore della scatola)

5 cm x 4 = 20 cm (base: lato maggiore della scatola)

20 cm^2 x 15 = 300 cm^2 (area della scatola)

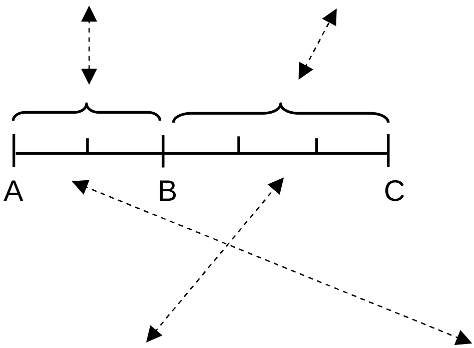
Verbalizzare in modi diversi per capire

Il seguente problema faceva parte delle prove di ammissione ad un corso per insegnanti.

Problema -*Una corda è lunga 20 cm.*
Viene tagliata in 2 pezzi, di cui uno è i 2/3 dell'altro.
Quanto misura ciascuno dei 2 pezzi?

Alcuni laureati (non in matematica) lo sbagliarono, applicando meccanicamente una formula errata, senza comprendere il testo, che avrebbe richiesto facili inferenze, con l'eventuale aiuto di un disegnino, e con una verbalizzazione chiara e significativa, come nei seguenti esempi.

Una corda è lunga 20 cm.
Viene tagliata in 2 pezzi AB e BC
***Un pezzo** è i **2 terzi** dell'**altro** (il quale perciò è **3/3**)*



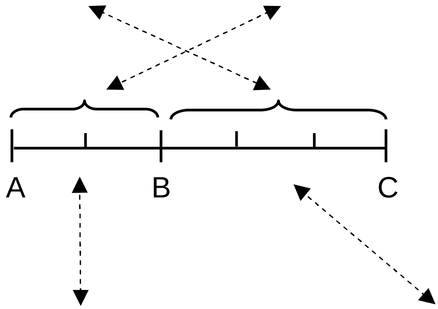
AB = 2/3 BC

*AB **:** BC = 2 **:** 3*

*Il pezzo BC è **3 terzi** e il pezzo AB è **2 terzi** di BC.*
Insieme formano la corda intera di 20 cm
*formata da BC, che è **3 terzi,** + **2 terzi** di BC**,***
*che in tutto fanno **5 terzi** di BC*

Inverto il rapporto

Una corda è lunga 20 cm.
Viene tagliata in 2 pezzi AB e BC.
***Un pezzo** è i **3/2** dell'**altro** (il quale perciò è **2/2**)*



BC = 3/2 AB

*BC **:** AB = 3 **:** 2*

*Il pezzo AB è **2 mezzi** e il pezzo BC è **3/2** di AB.*
Insieme formano la corda intera di 20 cm
*formata da AB, che è **2 mezzi,** + **3 mezzi** di AB,*
*che in tutto fanno **5 mezzi** di AB*

Sono ovviamente possibili anche altre verbalizzazioni. *Verbalizzare le rappresentazioni concrete, e viceversa, rappresentare concretamente i testi verbali*, in forme diverse, consente di capire bene i concetti rappresentati concretamente ed espressi verbalmente, e quindi di capire i problemi e le operazioni per risolverli, che altrimenti rischiano di essere l'applicazione meccanica di una o più regole. Tale applicazione può sembrare più semplice e immediata: in realtà spesso è solo più semplicistica se trascura e cortocircùita i concetti su cui si fonda. Questi, se espressi nei testi verbali, possono essere capiti meglio mediante chiare rappresentazioni concrete, che, come dice Bruno D'Amore, costituiscono *"l'anticamera logica della soluzione."* Ma se non si è fatto un efficace lavoro di verbalizzazione a partire dalle rappresentazioni concrete, il testo verbale può risultare difficile da capire, con conseguente difficoltà di tradurlo o immaginarlo in una rappresentazione concreta.

E questo perché non è stata consolidata l'associazione dei significati e dei concetti rappresentati concretamente con la loro verbalizzazione e simbolizzazione. In tal caso serve a poco spiegare e studiare formule e regole, se non si capiscono i concetti su cui esse si fondano. Bisogna invece assicurare le condizioni che consentono di comprendere i concetti espressi nei testi verbali, *consolidando l'associazione* tra le rappresentazioni concrete, anche in forme diverse, dei concetti stessi, e i testi verbali, anche in forme diverse, che li esprimono, curando una verbalizzazione chiara e significativa delle rappresentazioni concrete stesse.

Verbalizzare per capire il procedimento risolutivo

Un importante traguardo per lo sviluppo delle competenze previsto dalle Indicazioni è la verbalizzazione del procedimento risolutivo dei problemi, per capirlo e controllarlo, ragionando con coerenza. Nel problema seguente, già visto, con le frazioni si deve calcolare il valore di 2 grandezze conoscendone la *somma e il rapporto* (problema cosiddetto di "*terzo tipo*").

Problema - *La somma di 2 segmenti è 20 cm e un segmento è i 2/3 dell'altro. Calcolare la misura di ciascun segmento.*

La *regola* consueta è che si deve dividere la loro somma (20), diviso la <u>*somma (5), di numeratore (2) più denominatore (3)*</u>, della frazione (2/3) che ne esprime il rapporto, e poi moltiplicare il risultato (4) per il numeratore (2) e per il denominatore (3).
Ma se non capisco perché faccio le operazioni previste dalla suddetta regola, mi limito ad applicarla meccanicamente, come un automatismo mnemonico.

Se invece voglio capire e ragionare posso verbalizzare nel modo seguente osservando la costruzione concreta o il disegno.

I 2 segmenti sono uno 2 terzi dell'altro: il quale perciò è 3 terzi.

La loro somma 20 corrisponde perciò a
2 terzi + 3 terzi, cioè a 5 terzi *del segmento maggiore.*

Se divido 20 in 5 parti uguali ottengo 4, che è il valore di 1 terzo del segmento maggiore, composto di 3 terzi, la cui misura è perciò di
4 x 3 = 12 cm.

L'altro segmento, che è 2 terzi del precedente, misurerà
4 x 2 = 8 cm.

Le operazioni sono le stesse, ma osservando la rappresentazione concreta o il disegno e verbaliz-zando si capisce meglio perché le eseguo.

La *verbalizzazione* suddetta *corrisponde all' equazione* con cui si può formalizzare il procedimento risolutivo.

pongo BC = y ; *AB = 2/3 y*

Equazione risolutiva: *y + 2/3 y = 20*

Il suo sviluppo corrisponde alla verbalizzazione fatta con il linguaggio ordinario. Infatti si ha:

3/3 y + 2/3 y = 20

5/3 y = 20

Y = 20 x 3/5 = 20 : 5 x 3 = 4 x 3 = 12 (misura BC)

2/3 y = 12 x 2/3 = 12 : 3 x 2 = 4 x 2 = 8 (misura AB)

Gradualità e livelli di astrazione

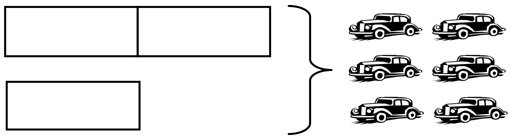
Fondamentale è la gradualità nelle difficoltà da affrontare. I problemi con la *somma e il rapporto* di 2 grandezze, ad es., come quello già visto, possono essere anche semplicissimi, come il seguente:

Problema *-Giorgio dice a Carlo: -Io ho la* ***metà*** *delle tue automobiline; se le mettiamo* ***insieme*** *abbiamo in tutto 6 automobiline. Quante automobiline ha Carlo? E quante Giorgio?*

La soluzione è intuitiva, con la manipolazione o il disegno, che ovviamente saranno gli stessi alunni a ricercare, se necessario con l’aiuto dell’insegnante.

Auto di Carlo

Auto di Giorgio



<u>*Secondo livello: secondaria di primo grado*</u>

Lo stesso problema, con gli stessi dati, può essere formulato in modo molto più astratto:

Problema - *Trovare 2 numeri sapendo che la loro* **somma è 6** *e che uno è la* ***metà*** *dell’altro.*

Si può visualizzare il problema anche con 2 segmenti.
Uno dei 2 numeri è diviso in *2 mezzi* e l’altro è *1 mezzo del primo.*
In tutto sono *2 mezzi + 1 mezzo = 3 mezzi* che corrispondono a *6.*
Per trovare *1 mezzo* faccio *6 diviso 3 = 2,* che è il valore di *1 mezzo.*
Poi moltiplico *2 per 2 = 4* che è il valore di *2 mezzi.*

Terzo livello: secondaria di secondo grado.

Si può formulare lo stesso problema a livello ancora più astratto e generale :

Problema - *Trovare 2 numeri conoscendo la loro somma e sapendo che* ***uno è la metà*** *dell'altro.*

Basta impostare e risolvere il semplicissimo sistema di equazioni

$$\begin{cases} z + y = S \\ z = 1/2\, y \end{cases}$$

Un'insegnante una volta mi disse che preferiva far usare meno possibile agli alunni i sussidi concreti perché altrimenti essi ne avevano **sempre bisogno**, e trovavano **difficoltà ad astrarre** i concetti. Rimasi molto **sorpreso**, perché è vero il contrario.

Forse quell'insegnante **usava male i sussidi concreti.**

I sussidi concreti, infatti, **se usati bene**, sono un un potente **trampolino di lancio** verso l'astrazione, per far **capire meglio i concetti** ed esprimerli con i **linguaggi** ed i **simboli astratti,** evitando il **verbalismo** vuoto e l'apprendimento **mnemonico.**
I quali spesso dipendono proprio dal **mancato uso di sussidi** concreti adeguati, pensando che bastino le spiegazioni verbali, magari accompagnate da qualche disegno: così facendo, però, si rischia di mettere il **carro davanti ai buoi**.

I sussidi concreti, perciò, non devono far trascurare il **linguaggio verbale** e l'uso dei **simboli astratti.**
Anzi, devono essere il loro **trampolino di lancio.**

Il linguaggio verbale e simbolico, infatti, sarà tanto più pieno di significato quanto più si sarà curata adeguatamente la **verbalizzazione** riferita all'esperienza concreta, in "**presa diretta"** con il **pensiero.**

E grazie a ciò diminuirà sempre più anche la necessità di esempi concreti, peraltro spesso ugualmente importanti, per capire, ragionare e risolvere problemi, in cui riveste un ruolo fondamentale la **comprensione semantica** delle **parole** e del **testo,** come dimostrano molte ricerche.

Mussen-Conger-Kagan, nel libro “Linguaggio e sviluppo cognitivo”, affermano: *“Dagli scritti di **Piaget** si può di tanto in tanto dedurre implicitamente che il bambino di **5 anni** è **incapace** di serializzare in qualsiasi dimensione, e nessun bambino di 7 anni è capace di ragionare su qualsiasi argomento **senza oggetti concreti.***

*Queste affermazioni categoriche sono ancora **controverse**.*

*La maggior parte dei bambini di **5 anni** sostiene che **il proprio padre** è più grande di **un coniglio**, e che un coniglio è più grande di **un topo,** e si rende conto che il **proprio padre** è più grande di **un topo**, rivelando così una capacità di **ordinare** gli oggetti secondo una dimensione di grandezza.*

*La differenza tra questo problema e quelli utilizzati da Piaget consiste nel fatto che il problema del **padre** e del **coniglio** si riferisce a **nozioni molto familiari. Se non capisce** la domanda che gli viene fatta, il bambino agirà ovviamente a un **livello immaturo**.*

***Piaget** sostiene ad es. che il bambino di **8 anni non riesce** a **classificare** se stesso in **2 dimensioni contemporaneamente**, cioè non riesce a considerarsi nello stesso tempo membro di **una città** ed anche di **un paese.** Uno dei motivi di questa carenza dipende dal fatto che il bambino **non comprende** completamente il **significato semantico** delle parole **città e paese**: non sa che una città fa parte di una nazione. Si può dimostrare che il bambino di **5 anni è capace** di **doppie** classificazioni **quando comprende** i 2 concetti.*

*Il bambino di 5 anni sa di far parte della famiglia **Rossi** e, nello stesso tempo, del sesso **maschile.***

Mussen-Conger-Kagan concludono: *“I passi avanti compiuti sulla via del **linguaggio** aprono la strada ai progressi nell’ apprendimento complesso, nella formazione dei concetti, nel **pensiero**, nel ragionamento e nella soluzione dei problemi. Queste **attività cognitive** ad alto livello vengono considerevolmente accentuate dalla **mediazione verbale**. Il **linguaggio** e il processo di definizione (mediazione verbale), esercitano **un’influenza enorme** sul processo di soluzione dei problemi ecc....*

Guido Petter fa il seguente esempio:
*"A **Torino** vive circa un **milione di persone**. Sulla testa di una persona non crescono più di **300.000 capelli**. E' possibile affermare che a Torino ci sono sicuramente **2 persone** con lo **stesso numero** di capelli?".*

La soluzione è molto più facile se il problema, con la stessa struttura logica, contiene però dati più intuitivi. Ad esempio:

*"Sappiamo che **i mesi** dell'anno **sono 12.** In una certa classe di una scuola ci sono **13 bambini.** E' possibile dire che in quella classe ci sono certamente **2 bambini** nati nello **stesso mese** ?".*

(G. Petter, "Psicologia e scuola primaria")

Keith Devlin scrive:

*"Se trovavano un prodotto che costava 4 dollari per un pacco da **3 etti** e un pacco più grande di **6 etti** per 7 dollari molti acquirenti confrontavano in realtà **i rapporti 4/3** e **7/6** per vedere qual era il maggiore. Per cui i ricercatori avevano inserito nel test la domanda: "Qual è maggiore tra **4/3 e 7/6** ?" Ma la stessa acquirente che se l'era **cavata benissimo** al supermercato, nel **test sbagliava.** Ecc…*
*I bambini (venditori di noci di cocco) erano sempre precisi quando sedevano dietro la loro bancarella, ma si dimostravano veri e propri asini quando veniva loro proposto lo stesso **identico problema** aritmetico, espresso però in una tipica **formulazione scolastica.***
*I ricercatori ne rimasero così impressionati e incuriositi che coniarono un nome apposta per tutto ciò: **matematica di strada.** Ecc…(Impressionati da un fatto così **ovvio**? Un po' **tonti**! (Nota dello scrivente)) Poiché, sia i bambini di Recife sia gli alunni di Herndon avevano dimostrato di essere capaci di operare tranquillamente con l'aritmetica in alcuni **contesti a loro familiari,** quando i numeri avevano per loro **un significato**, sembra chiaro che **il significato,** o il senso pratico immediato, ha un ruolo **fondamentale** nella nostra capacità di fare dell'aritmetica."*

(Keith Devlin, "L'istinto matematico")

Mente linguaggio apprendimento

L'importanza delle conoscenze ben organizzate e strutturate è stata evidenziata dalle teorie degli *"**script**"*, *"**frame**"*, *"**schemi**"*, presentate da Dario **Corno** e Graziella **Pozzo** nel libro *"**Mente, linguaggio, apprendimento**"*, in cui si afferma: *"Pare che la maggior parte delle nostre capacità di **ragionamento** sia legata a **schemi** particolari di particolari **ambiti di conoscenza**."*

Tale conclusione è suggerita da alcuni **esperimenti,** tra cui quello di **Laird** e **D'Andrade**, in cui è stato proposto a uno stesso campione di persone 2 problemi di **implicazione logica,** *("se…… allora"),* con la **stessa struttura** logica, ma dal contenuto **estraneo**, nel primo, e molto più **familiare** nel secondo, riscontrando una percentuale di **successi 5 volte superiore** nella soluzione del secondo problema.

D. **Corno** e G. **Pozzo** osservano: *"**Il primo** caso **non** è **familiare**, e i soggetti, non possedendo **gli schemi** entro cui riportare il problema, possono solo attivare strategie di soluzione di problemi molto generali. **Il secondo** caso è più vicino a situazioni "**reali**" di soluzione di problemi. Una volta "**capìta**" la **situazione**, in quanto codificata in termini di un insieme relativamente ricco di schemi, si possono introdurre i vincoli concettuali degli schemi per risolvere il problema. E' come se lo **schema contenesse** già tutti i meccanismi di **ragionamento** comunemente richiesti nell'uso degli schemi. **Capire** il problema e **risolverlo** sono perciò quasi la **stessa cosa**."*

I **2 problemi** usati nel suddetto esperimento sono gli stessi citati nell'articolo "*Insegnamento **muro** e **ponte***", su L'Educatore, n° 1, a.s. 2008/'09, in cui Mario **Castoldi** scrive: *"Nel suo bel libro sulla valutazione degli apprendimenti, **Maurizio Lichtner** presenta, tra gli altri, questi 2 esempi per dimostrare quanto sia diverso l'apprendimento scolastico, fondato su un **ordine logico**, dall' apprendimento in situazioni di realtà, fondato su un **ordine pratico.***

*1-Hai le seguenti **4 carte.** Devi verificare il rispetto della seguente regola: "Se su un lato c'è una **vocale**, sull'altro deve esserci un numero **dispari**", voltando il minor numero di carte. Quali carte volteresti ?*

E	M	7	4

*2 -E' sera, al grande magazzino l'addetto controlla le operazioni della giornata. In particolare deve verificare che, in caso di acquisto **superiore a 30 $**, il tagliando **deve** essere stato **firmato** sul retro dal responsabile. Quali tagliandi deve voltare per verificarlo?*

40 $	25 $	***Ugo Re***	**……..**

Le 2 situazioni sono basate entrambe su *un'**implicazione logica***, e in entrambe si devono voltare la **prima** e l'**ultima** carta o scheda.

Infatti: se **vocale** (E) allora **dispari**; perciò se **non dispari** (4) allora **non vocale**.

Se **più** di **30 $** (40 $) allora **firma**; perciò se **non firma** (…) allora **non più** di **30 $.**

Ma il secondo problema è più facile perché è **più intuitivo.**

Come anche: se **piove** allora ci sono le **nuvole**; perciò, se **non** ci sono le **nuvole** allora **non piove**. Ma **non viceversa**. Condizione ***necessaria** ma **non sufficiente*** perché piova è che ci siano le **nuvole**.

Se PIOVE ---------▶ *allora* -------------▶ ci sono NUVOLE
NON PIOVE ◀------ *allora* ◀----- *se* NON ci sono NUVOLE

Se stai a **Roma** allora stai in **Italia,** perciò, se **non** stai in **Italia** allora **non** stai a **Roma**.

Se è **festa** allora **non** c'è **scuola**, perciò se c'è **scuola** allora **non** è **festa**.

Se **cane** allora **animale**, perciò, se **non animale** allora **non cane.**
Tutti **i cani** sono **animali,** ma **non tutti** gli **animali** sono **cani.**

Se **Ugo** allora **maschio**, perciò, se **non maschio** allora **non Ugo.**
Tutti gli Ugo sono **maschi**, ma **non tutti** i maschi sono **Ugo.**

Da non confondere con la ***doppia*** *implicazione o* ***coimplicazione logica***: ***Se e solo se*** **respiri** allora sei **vivo**, e ***viceversa.***
Condizione ***necessaria*** *e* ***sufficiente*** perché tu sia **vivo** è che **respiri.**

Se e solo se ***Se e solo se***

RESPIRI ◄--------► ***allora*** ◄--------► SEI VIVO
NON RESPIRI ◄--------► ***allora*** ◄--------► NON SEI VIVO

Se e solo se **tu** sei **mia madre** *allora* **io** sono **tuo figlio** e viceversa. Perciò se tu **non sei mia madre** allora io **non sono tuo figlio** e viceversa.

Se e solo se **oggi** è **giovedì** *allora* **domani** è **venerdì** e viceversa. Perciò se oggi **non è giovedì** allora domani **non è venerdì** e viceversa.

Mario **Castoldi**, nell'articolo citato con l'esempio dei 2 problemi, cita **Comoglio** che parla di un insegnamento "***ponte***", un insegnamento **significativo**, con cui si cerca di collegare la conoscenza con la realtà, e di un insegnamento "***muro***", che invece rende **inerte** la conoscenza.

Come afferma **Perkins**: *"La* ***conoscenza inerte*** *si trova in un* ***attico*** *della* ***mente****. Si scioglie solo quando in modo specifico è richiamata da un quiz o da una* ***sollecitazione*** *diretta."*
E come dice Philipe **Perrenoud**, *"La conoscenza non deve essere materia* ***inerte****, incapsulata all'interno delle discipline scolastiche, bensì materia* ***viva****, da mettere* ***in relazione*** *con le* ***esperienze*** *di vita e i problemi che* ***la realtà*** *pone."*

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

Emma Castelnuovo, “*Didattica della matematica*”, La Nuova Italia

E. Valenti, “*La matematica nella nuova scuola elementare*”, Le Monnier

D.Corno-G. Pozzo, “*Mente, linguaggio, apprendimento*”, La Nuova Italia

Mussen-Conger-Kagan, “*Linguaggio e sviluppo cognitivo*”, Feltrinelli

Guido Petter, “*Psicologia e scuola primaria*”, Giunti

Mosconi-D’urso, *“La soluzione dei problemi”,* Giunti-Barbera ’73

Keith Devlin, *L’istinto matematico*, Raffaello Cortina ‘07

Hans Freudenthal, “*Ripensando l’educazione matematica*”, La Scuola ’94

M. Castoldi, “*Insegnamento **muro** e **ponte***”, L’Educatore, n° 1, ‘08/’09